"Los 20"

Tarea #2 Rumbo al Nacional
11-15 de septiembre de 2016
Por: I. Shariguin

Resumen

Los 20. Un clásico... o muchos. Problemas básicos que todos deben hacer para poder decir que saben Geometría. Si quieres ir al nacional, tienes que saber hacer como mínimo requisito los 20. Estos 20 problemas salieron del famoso libro ruso de geometría de I. Shariguin

1. Problemas

Pues ya saben cuántos problemas son.

1. Demostrar que las medianas en el triángulo se intersecan en un punto y se dividen por éste en razón de $1:2$.
2. Demostrar que las medianas dividen el triángulo en seis partes equivalentes.
3. Demostrar que el diámetro de la circunferencia que circunscribe un triángulo es igual a la razón entre su lado y el seno del ángulo opuesto.
4. Supongamos que el vértice de un ángulo se encuentra fuera de un circulo y sus lados intersecan la circunferencia. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semidiferencia entre los arcos cortados por sus lados en la circunferencia, dispuestos en el interior del ángulo.
5. Supongamos que el vértice de un ángulo se halla dentro de un circulo. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semisuma de los arcos, uno de los cuales se encuentra entre sus lados, mientras que el otro se halla entre sus prolongaciones más alla del vértice del ángulo.
6. Sea AB la cuerda de un circunferencia; l, la tangente a la misma (A es el punto de tangencia). Demostrar que cada uno de los dos ángulos entre AB y l se determina como la mitad del arco de la circunferencia comprendida en el interior del ángulo examinado.
7. Por el punto M situado a la distancia a del centro de la circunferencia de radio R ($a > R$), está trazada una secante que corta la circunferencia en los puntos A y B. Demostrar que $MA \cdot MB$ es constante para todas las secantes y es igual $a^2 - R^2$ (al cuadrado de la longitud de la tangente).
8. Por el punto M que se halla a una distancia a del centro de una circunferencia de radio R ($a < R$), pasa la cuerda AB. Demostrar que es constante para todas las cuerdas y es igual a $R^2 - a^2$.
9. Sea AM la bisectriz del triángulo ABC. Demostrar que $BM : CM = AB : AC$. Lo mismo es cierto para la bisectriz del ángulo exterior del triángulo. (En este caso M se halla en la prolongación del lado BC).
10. Demostrar que la suma de las diagonales al cuadrado de un paralelogramo es igual a la suma de sus lados al cuadrado.
11. Los lados de un triángulo son a, b y c. Demostrar que la mediana M_a trazada hacia el lado a se calcula por la fórmula.

$$M_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

12. Tenemos dos triángulos con un vértice A común, de los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por A. Demostrar que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen al vértice A.

13. Demostrar que el área de un polígono circunscrito es igual a rp, donde r es radio de la circunferencia inscrita, p su semiperimetro (como caso particular, esta fórmula es valida para el triángulo).

14. Demostrar que el área del cuadrilátero es igual al semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo comprendido entre éstas.

15. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes para calcular el área del triángulo:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \quad S = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \sin C$$

Donde A, B, C son los ángulos del triángulo, a, el lado dispuesto frente al ángulo A; R, el radio del circulo circunscrito.

16. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo se determina por la fórmula: $r = \frac{a+b-c}{2}$, donde a y b son los catetos y c, la hipotenusa.

17. Demostrar que si a y b son dos lados de un triángulo, C es el ángulo entre éstos e ℓ, la bisectriz de este ángulo, entonces:

$$\ell = \frac{2ab \cdot \cos(\frac{\measuredangle C}{2})}{a+b}$$

18. Demostrar que las distancias desde el vértice A del triángulo ABC hasta los puntos de tangencia de los lados AB y AC con la circunferencia inscrita son iguales a $p - a$, donde p es el semiperimetro del triángulo ABC, $a = BC$.

19. Demostrar que si en el cuadrilatero convexo $ABCD$ se cumple la relación $AB + CD = AD + BC$, deberá existir una circunferencia que contacte con todos sus lados.

20. a) Demostrar que las alturas en un triángulo se intersecan en un punto

    b) Demostrar que la distancia desde el vértice de un triángulo hasta el punto de intersección de sus alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del circulo circunscrito hasta el lado opuesto.