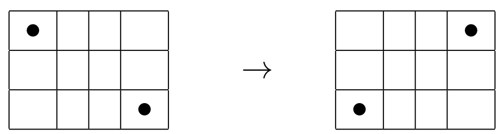
28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2014

Cuarta etapa

Primer día

Problema 1 En un tablero de $n \times n$ se colocan n fichas de manera que no haya 2 en la misma fila o columna. Un movimiento válido es elegir 2 fichas que sean los vértices superior izquierdo e inferior derecho de un rectángulo y cambiarlos a que sean el superior derecho e inferior izquierdo; sin embargo el movimiento contrario no es válido. Un movimiento válido es



a. Demuestra que para cualquier configuración inicial se puede llegar a que todas las fichas estén en la diagonal después de una cantidad finita de movimientos.

b. Demuestra que siempre es posible llegar a la diagonal con no más de $n-1$ movimientos.

Problema 2 El entero positivo n y el primo p cumplen que p no divide a $(3n)!$ pero sí divide a

$$(3n+1)! + (3n+2)!.$$

Mostrar que 3 divide a $p-1$.

Problema 3 En un cuadrilátero convexo $ABCD$, los puntos M y N están sobre el segmento AB de tal forma que $AM = MN = NB$, y los puntos P y Q están sobre el segmento CD de tal forma que $CP = PQ = QD$. Prueba que

$$[AMCP] = [MNPQ] = \frac{1}{3}[ABCD]$$

donde $[ABCD]$ denota el área del cuadrilátero $ABCD$.

¡Buena Suerte!

28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

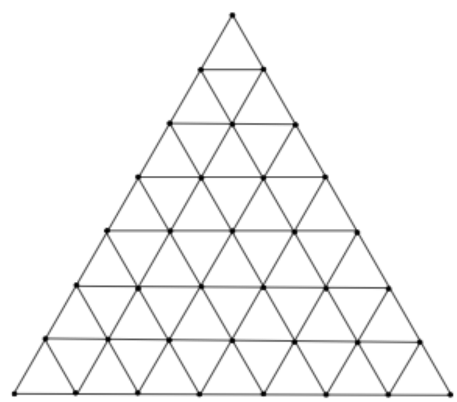
Examen estatal de Baja California 2014

Cuarta etapa

Segundo día

Problema 4 Sea ABC un triángulo con $\angle A = 90°$. Sea D el pie de altura desde el vértice A, E el pie de altura del triángulo ADC desde el vértice D y F el pie de altura del triángulo DEC desde el vértice E. Demuestra que $AB \neq AF$.

Problema 5. Un triángulo equilátero de lado 7 se divide en triángulos equiláteros de lado 1 (ver la figura). Se pintan todos los vértices de los triángulos usando los colores rojo, verde y azul de manera que cada triángulito de lado 1 tiene un vértice de cada color. Probar que si se eligen segmentos (de lado 1) de manera que cada vértice pertenece a exactamente un segmento, entonces el número de segmentos elegidos que van de un vértice rojo a uno azul es el mismo que el número de segmentos que van de un vértice rojo a uno verde.



Problema 6 Encuentra todos los enteros positivos n que pueden ser representados como

$$n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$$

donde a, b y c son enteros positivos.

Nota: $[a, b]$ es el *mínimo común múltiplo* de a y b.

¡Buena Suerte!