Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Tercera etapa
Examen 1

Nombre:____
Escuela:____
Semestre o año:__________________ **Edad:**____________
Correo:____

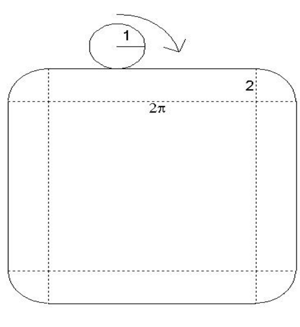
Instrucciones:
- Contesta las preguntas en las hojas blancas que te serán proporcionadas.
- No se permite el uso de calculadoras.
- Este examen tiene una duración de 2 horas.

Buena Suerte!!!

Problema 1
(a) *Encuentra todos los números naturales* n *para los cuales 7 divide a* $2^n - 1$.
(b) *Prueba que* **no** *existe un número natural* n *de manera que 7 divida a* $2^n + 1$.

Problema 2 *Dos ladrones roban un recipiente con vino de 8 litros. ¿Cómo pueden ellos dividirlo en dos partes de 4 litros si todo lo que tienen es un recipiente de 3 litros y otro de 5 litros?*

Problema 3 *Un cuadrado de lado* 2π*cm se ha redondeado agregándole un marco de 2cm de lado y poniéndole en las esquinas cuartos de círculo de 2cm de radio. Alrededor del cuadrado redondeado gira una rueda que mide 1cm de radio (la rueda va siempre tocando el cuadrado redondeado). ¿Cuántas vueltas completas da la rueda sobre sí misma al dar una vuelta completa alrededor del cuadrado redondeado?*



Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Tercera etapa
Examen 2

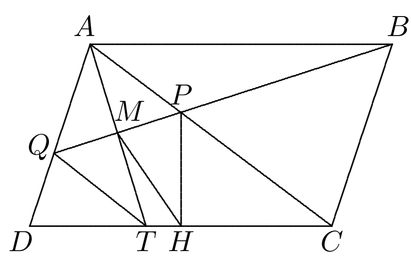
Nombre:____
Escuela:____
Semestre o año:__________________ **Edad:**____________
Correo:____

Instrucciones:
- Contesta las preguntas en las hojas blancas que te serán proporcionadas.
- No se permite el uso de calculadoras.
- Este examen tiene una duración de 4 horas y media.

Buena Suerte!!!

1. Denotamos por $d(n)$ el número de divisores positivos de un número natural n (incluyendo 1 y n). Pruebe que existe una infinidad de números n, tales que $\frac{n}{d(n)}$ es entero.

2. En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo; P es un punto sobre la diagonal AC tal que $PC = BC$; H es un punto sobre el lado CD tal que PH es perpendicular a CD; Q es el punto de intersección de AD con BP; M es el punto medio del segmento PQ; T es la intersección de AM con CD. Prueba que los ángulos MQT y MHT son iguales.



3. Un montón de naranjas se apila cuidadosamente en capas de forma que en el hueco de 4 naranjas de una capa se coloca otra de la capa superior. La primera capa por abajo tiene m filas y n columnas y la última por arriba una sola fila; siendo m el número de diagonales de un decágono y n el menor número que dividido por 4 da resto 3, por 5 da resto 4, y por 6 da resto 5. ¿Cuántas naranjas tiene el montón?

XX Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Baja California

Tercera etapa
Examen 3

Nombre:____
Escuela:____
Correo:____

Instrucciones:
- Contesta las preguntas en las hojas blancas que te serán proporcionadas.
- No se permite el uso de calculadoras.
- Este examen tiene una duración de 4 horas y media.

¡Buena Suerte!

1. En algún país lejano hay 15 ciudades, cada una de las cuales está conectada con al menos otras siete. Demuestra que se puede hacer un viaje de una ciudad a cualquier otra, no importando si el viaje no es directo.

2. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:
$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

3. Se escriben los números $1, 2, \ldots, 20$ en un pizarrón. Es permitido borrar cualesquiera dos números a y b y escribir el número $ab + a + b$. ¿Cuál será el número en el pizarrón tras haber hecho 19 veces esa operación?