27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2013

Cuarta etapa

Primer día

Problema 1 Encuentra todas las cuartetas de primos p, q, r, s tales que $p < q < r < s$ y además

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 2013$$

Problema 2 En un triángulo ABC, la mediana y la altura en A dividen al ángulo A en tres partes iguales. ¿Cuáles son los ángulos del triángulo ABC?

Problema 3 Se han dado cinco puntos en el plano de manera que no hay 3 de ellos colineales. Además, cualesquiera dos líneas que unan un par de esos puntos cumplen que no son paralelas ni perpendiculares y no hay 3 de éstas coincidentes. Desde cada uno de los puntos se trazan las perpendiculares a todas las líneas que unen a los otros cuatro puntos. Determina el número máximo de intersecciones entre sí, que pueden tener estas perpendiculares.

¡Buena Suerte!

27^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2013

Cuarta etapa

Segundo día

Problema 4 Sea A_n el conjunto con los elementos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Para cada subconjunto no vacío de A_n, es decir, con al menos un elemento, se calcula el producto de sus elementos, y se obtiene su recíproco. Sea S_n la suma de todos estos recíprocos. Encuentra S_{2013}.

Problema 5 Itzel juega Batalla Naval Z con David. En Batalla Naval Z, se tiene un tablero de 7×7, donde David coloca 3 buques, uno azul que mide 1×2, uno verde que mide 1×3, y uno rojo que mide 1×4, de manera que no se traslapan ni se salen del tablero. Después, David cubre el tablero con 49 cuadros de 1×1, de manera que Itzel no conoce la ubicación de los buques. Una jugada de Itzel consiste en escoger una casilla del tablero y quitar el cuadro que lo cubre, revelando lo que hay debajo. Si encuentra un buque, se ve su color, mas no la parte del buque (parte frontal, trasera o en medio). Demuestra que 33 jugadas son suficientes para que Itzel destape completamente los 3 buques.

Problema 6 Si un pentágono regular $ABCDE$ está inscrito en una circunferencia, y el punto P se encuentra en el arco $\overset{\frown}{BC}$, prueba que

$$PA + PD = PB + PC + PE$$

¡Buena Suerte!