

25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2011

Cuarta etapa

Primer día

Problema 1 En cada uno de los 25 cuadritos de una cuadrícula 5×5 se coloca un número real positivo y menor o igual a 1, de manera que:

- la suma de los números de cada renglón y cada columna es un entero positivo,
- la suma de los 25 números es mayor o igual a 11.

a) Muestra que alguno de los 25 números es mayor o igual a $3/5$.

b) Si exactamente uno de los números es mayor o igual a $3/5$, entonces demuestra que la suma de los números del renglón donde se encuentra ese número es igual a la suma de los números de la columna del mismo número.

Problema 2 Prueba que todos los enteros positivos impares se pueden escribir en la forma

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n,$$

para algún entero positivo n y cada a_i es 1 ó -1 (por ejemplo, $11 = 1 - 2 + 4 + 8$).

Problema 3 Se dan dos circunferencias de radios distintos que son tangentes entre sí exteriormente. La tangente común a ambas circunferencias toca a la circunferencia de radio mayor en el punto A y a la menor en B . La circunferencia con centro en A que pasa por B corta a la circunferencia mayor en los puntos P y Q . Demuestra que la recta que pasa por P y Q es tangente a la circunferencia de menor radio.

Buena Suerte!!!

25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2011

Cuarta etapa

Segundo día

Problema 4 Sean $n = 999\dots 9$ y $m = aaa\dots a$ dos enteros positivos, cada uno con 2011 dígitos, y con $a \geq 4$. Encuentra la suma de los dígitos de $mn + 3$.

Problema 5 Los vértices A y B de un triángulo equilátero ABC se encuentran sobre una circunferencia Γ de radio 1 (C se encuentra por fuera de Γ). Sea $D \neq B$ un punto sobre la circunferencia Γ tal que $AD = AB$. La recta DC corta a Γ por segunda vez en un punto E . Encuentra la longitud del segmento CE .

Problema 6 Cada uno de los puntos del plano se pinta de rojo o azul. Determina si es posible o no encontrar un triángulo equilátero de lado 1 que tenga todos sus vértices del mismo color, no importando cómo haya sido coloreado el plano.

Buena Suerte!!!