22^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California 2008

Cuarta etapa

Nombre: ____
Escuela: ____
Semestre o año:______________________ **Edad:**____________________
Correo: ____

Instrucciones:
- Contesta las preguntas en las hojas blancas que te serán proporcionadas.
- No se permite el uso de calculadoras.
- Este examen tiene una duración de 3:00 horas.
- Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
- Sólo se puede hacer preguntas durante la primera hora del examen.

¡Buena Suerte!

Problema 1 Se tiene el número 1234 escrito en un una hoja blanca. Dos jugadores A y B toman turnos para jugar lo siguiente: en cada turno, un jugador puede restarle cualquiera de los dígitos del número escrito en la hoja (claro que no se puede restar el cero); se borra el viejo número y se escribe el nuevo. Pierde el que ya no pueda restar números (cuando se llegue al número cero). Si A es el que empieza jugando, ¿quién gana y cuál es su estrategia ganadora?

Problema 2 Encuentra el valor de $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2007^2 - 2008^2$.

Problema 3 Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ con la propiedad de que la suma de los ángulos $\angle ADC + \angle BCD = 90°$. Llamemos M al punto medio de AB y N al punto medio de CD. Prueba que

$$|MN| = \frac{|CD| - |AB|}{2}$$

.

Soluciones

Solución del Problema 1.

Notemos que el primer jugador siempre puede restar el dígito de las unidades. Si hace esto, el número escrito en la hoja terminará en 0 siempre. Esto asegura que B deba restar cualquiera de los otros dígitos (puesto que no puede restarle el cero), dándole nuevamente la oportunidad a A de restar el dígito de las unidades y teniendo otra vez un número que termina en cero. Como el número siempre esta decreciendo, es A el que gana puesto que él podrá llegar al número 0 y en ese momento B no podrá restar más.

Solución del Problema 2.

Primera solución

Sabemos que la suma de los cuadrados de los primeros n naturales se puede calcular como $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Notemos que

$$1^2-2^2+3^2-...+2007^2-2008^2 = \left(1^2+2^2+\cdots+2008^2\right)-2\left(2^2+4^2+\cdots+2008^2\right)$$

Luego, del segundo término se puede factorizar un 4, y obtener

$$4\left(1^2+2^2+\cdots+1004^2\right)$$

Y por último, calculamos las sumas mediante la fórmula que mencionamos al principio, y el resultado final es

$$\frac{1}{6}\left(2008\left(2009\right)\left(4017\right)-8\left(1004\right)\left(1005\right)\left(2009\right)\right)=-1004\left(2009\right)$$

Segunda solución

Agrupemos la suma de la forma $\left(1^2-2^2\right)+\left(3^2-4^2\right)+\cdots+\left(2007^2-2008^2\right)$, de manera que cada término es la diferencia del cuadrado de un impar y el cuadrado del par que le sigue. Para algún impar $2n-1$ la diferencia de su cuadrado con el cuadrado de su consecutivo es $\left(2n-1\right)^2-\left(2n\right)^2=-\left(4n-1\right)$. La suma de todas las parejas de cuadrados, está dada por

$$-\sum_{n=1}^{1004}\left(4n-1\right)=-4\left(\frac{1004\left(1005\right)}{2}\right)+1004=-1004\left(2009\right)$$

Tercera solución

Veamos las sumas parciales para los primeros números:

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
-3 &= 1^2 - 2^2 \\
6 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 \\
-10 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \\
15 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 \\
-21 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2
\end{aligned}$$

Las sumas parciales son exactamente los nmeros triangulares, pero con signo alternante. Sea T_n el n-ésimo triangular con signo alternante, es decir, $T_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, entonces el valor de la suma es

$$(-1)^{2009}\left(\frac{2008\,(2009)}{2}\right) = -\,(1004)\,(2009)$$

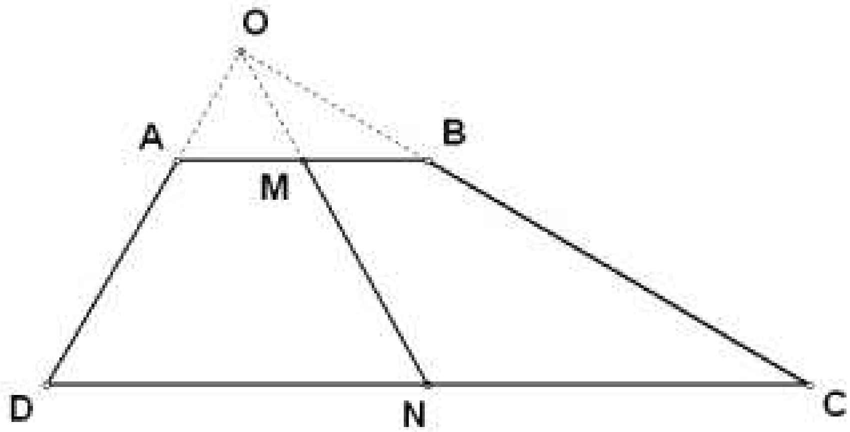
Sólo queda demostrar la validez de la fórmula para T_n, que podemos demostrar por inducción como a continuación:

$$\begin{aligned}
T_1 &= (-1)^2\left(\frac{1\,(2)}{2}\right) \\
\text{Suponiendo } T_n &= (-1)^{n+1}\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right) \\
T_{n+1} &= T_n + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1}\,(n+1)\left(\frac{n}{2} - (n+1)\right) \\
&= (-1)^{n+1}\,(n+1)\left(\frac{n - 2\,(n+1)}{2}\right) \\
&= (-1)^{n+2}\,\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Solución del Problema 3.

Primera Solución

Si prolongamos los lados AD y BC del trapecio, estas se cortan en el punto O, como se muestra en la figura.



Vemos que el triángulo ODC es rectángulo ya que $\angle ODC + \angle OCD = 90°$. Esto implica que el centro de la circunferencia circunscrita del $\triangle ODC$ es el punto N(todos los triángulos rectángulos tienen el centro de la circunferencia circunscrita en el punto medio de la hipotenusa), de lo que concluimos que $|ON| = |NC| = |ND|$

De la misma forma, tenemos que el triángulo OAB también es rectángulo y obtenemos que $|OM| = |MB| = |MA|$.

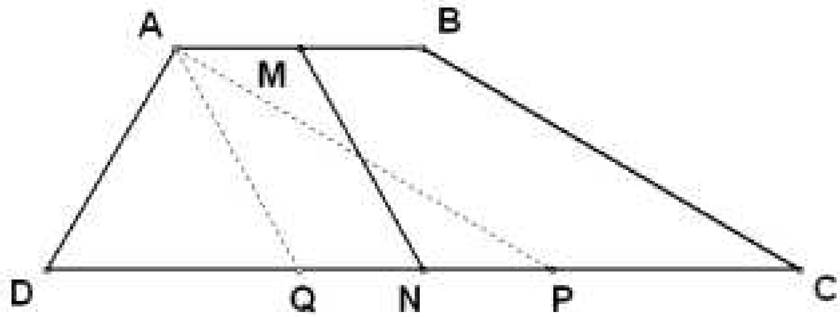
Como $\triangle OAB$ y $\triangle ODC$ son semejantes, por ser $AB||DC$, tenemos que los puntos O, M y N son colineales.

Por último, como $|ON| = |OM| + |MN|$, entonces

$$\begin{aligned} |MN| &= |ON| - |OM| \\ &= |NC| - |MB| \\ &= \tfrac{|DC|-|AB|}{2}. \end{aligned}$$

Segunda solución

Sean P y Q un par de puntos en CD tales que $AP \,||\, BC$ y $AQ \,||\, MN$, como se muestran en la siguiente figura.



Vamos a probar que Q es el punto medio del segmento DP. El segmento $|DQ| = |DN| - |QN|$, pero $|DN| = |DC|/2$ y $|QN| = |AM|$, por ser $AMNQ$ un paralelogramo. Juntando lo anterior, tenemos que $|DQ| = (|DC| - |AB|)/2$. Ahora, observemos que el cuadrilátero $ABCP$ también es paralelogramo, por lo que $|AB| = |PC|$. De esto se concluye que $|DQ| = (|DC| - |PC|)/2 = |DP|/2$.

Por construcción, tenemos que $\angle APD = \angle BCD$ y por lo tanto el triángulo APD es rectángulo con ángulo recto en A, ya que $\angle ADP + \angle APD = 90°$.

Por último, como el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo APD es el punto Q (por ser triángulo rectángulo), tenemos que $|AQ| = |DQ| = (|DC| - |AB|)/2$. Pero $|AQ| = |MN|$, por lo que concluimos que

$$|MN| = \frac{|DC| - |AB|}{2}.$$