Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California

Cuarta etapa

Primer día

Buena Suerte!!!

Problema 1 *Demuestra que la suma de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser el cuadrado de un número entero.*

Problema 2 *Se han reunido n personas. Algunas de ellas se conocen, cada dos desconocidos tienen exactamente dos conocidos en común, y cada dos conocidos no tienen conocidos comunes. Demuestra que cada persona presente conoce a la misma cantidad de personas.*

Problema 3 *Un triángulo* $\triangle ABC$ *es tal que* $\measuredangle BAC = 60°$. *Sean* D *y* E *puntos sobre los lados* AB *y* AC*, respectivamente, de tal manera que* $BD = DE = EC$. *Sea* O *el punto de intersección de* BE *y* DC. *Demuestra que* O *es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo* $\triangle ABC$.

Solución 1 *Supongamos que el primer entero es x, entonces la suma es*

$$S = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6 = 2(2x + 3).$$

Como $2x+3$ es un número impar, tenemos que 2 y $2x+3$ son primos relativos. Entonces, para que S fuera el cuadrado de un número entero, 2 debería ser un cuadrado también. Esto es imposible, por lo tanto la suma de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser el cuadrado de un número entero.

Solución 2 *Supongamos que uno de los presentes (X), tiene m conocidos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Por hipótesis, no hay dos personas entre las $a_1, \ldots, a_m$ que se conozcan entre sí (ya que ambas conocen a X). Por esto, para dos personas cualesquiera a_i, a_j debe existir otro conocido común, además de X. Esta persona no puede conocerse con X y a distintos pares les corresponderán distintas personas (si alguien fuese conocido común para dos pares distintos (a_i, a_j) y (a_k, a_l), tendría con X por lo menos tres conocidos comunes). Así, pues, el número de todas las personas que no se conocen con X no es menor que el de todos los pares de personas de entre las $a_1, a_2, \ldots, a_m$, es decir, no es menor que $\binom{m}{2}$. Por otro lado, cada persona que no se conozca con X tiene con él exactamente dos conocidos comunes, se sobreentiende, entre los $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Además, a distintas personas les corresponderán distintos pares (si un par (a_i, a_j) correspondiera a dos personas diferentes, a_i y a_j tendrían más de dos conocidos comunes, ya que son conocidos también de X). De aquí se deduce que el número de personas que no se conocen con X no es mayor que $\binom{m}{2}$, por lo que debe ser igual a $\binom{m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$. Pero entonces el número total de presentes es igual a $1 + m + \frac{m(m+1)}{2}$. Esto nos da una ecuación cuadrática con respecto a m, ésta tiene sólo una raíz positiva, lo cual significa que para todas las personas el número m de sus conocidos es el mismo.*

Solución 3 *Supongamos que $AB \geq AC$. Consideremos el punto P en el interior del triángulo de tal manera que el triángulo $\triangle EPC$ es equilátero. Como $\measuredangle PEC = 60°$ tenemos que PE es paralela a DB, además, como $DB = PE$ tenemos que $DBPE$ es un rombo. De aquí obtenemos que $BP = PC$ y que $\measuredangle PBC = \measuredangle PCB = \beta$. Sean $\measuredangle DBE = \measuredangle PBE = \measuredangle DEB = \measuredangle PEB = \alpha$. Como $\measuredangle ECP = 60°$ entonces $\alpha + \beta = 30°$. Además, $\measuredangle DEC + \measuredangle EDC + \measuredangle ECD = 60° + 2\alpha + \measuredangle EDC + \measuredangle ECD = 180°$, entonces $\measuredangle ECD = 60° - \alpha$,* *de donde* $\measuredangle DCP = \alpha$*. Con esto, hemos obtenido que el triángulo* $\triangle BOC$ *es isósceles y que* $\measuredangle BOC = 120^\circ$*, por lo tanto,* O *es el circuncentro del triángulo* $\triangle ABC$*.*

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California

Cuarta etapa

Segundo día

Buena Suerte!!!

Problema 4 *Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersectan en dos puntos A y B. Sobre el arco de la circunferencia Γ_1, el cual está fuera del círculo encerrado por Γ_2, se toman los puntos P y Q. Los rayos PA, PB, QA y QB intersectan a la circunferencia Γ_2 en C, D, G y H, respectivamente. Demuestra que $CD = GH$.*

Problema 5 *Encuentra el menor entero positivo n tal que $\frac{n}{2}$ es un cuadrado perfecto, $\frac{n}{3}$ es un cubo perfecto y $\frac{n}{5}$ es una potencia quinta perfecta.*

Nota. Decimos que un número entero positivo es un cuadrado (cubo, potencia quinta) perfecto si es el cuadrado (cubo, potencia quinta) de un número entero positivo.

Problema 6 *Sea a_1, a_2, ..., a_n una sucesión de números de tal manera que $a_1 = 1$ y para $n \geq 2$*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n.$$

Calcula a_{2005}.

Solución 4 *Denotemos los arcos en el orden de las manecillas del reloj. Tenemos que* $\measuredangle CAD = \measuredangle ADP + \measuredangle APD = \measuredangle ADB + \measuredangle APB$. *Sabemos que* $\measuredangle ADB$ *es equivalente a la mitad del arco* AB *de* Γ_2 *y que* $\measuredangle APB$ *es equivalente a la mitad del arco* BA *de* Γ_1. *Como los arcos* AB *y* BA *son constantes, tenemos que* $\measuredangle CAD = \measuredangle GAH$, *de aquí obtenemos que* $CD = GH$.

Solución 5 *Como* n *es divisible por* $2, 3$ *y* 5, *podemos asumir que éste tiene la forma* $n = 2^a 3^b 5^c$. *Entonces,* $\frac{n}{2} = 2^{a-1}3^b5^c$, $\frac{n}{3} = 2^a3^{b-1}5^c$, $\frac{n}{5} = 2^a3^b5^{c-1}$. *Las condiciones son tales que* $a - 1$ *debe ser par y* a *debe ser múltiplo de* 3 *y* 5. *El menor de tales* a *es* $a = 15$. *De manera similar, los menores valores para* b *y* c *son* $b = 10$ *y* $c = 6$. *Por lo tanto,* $n = 2^{15}3^{10}5^6$ *es el menor de tales enteros positivos.*

Solución 6 *Por hipótesis*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n.$$

Hacemos lo mismo para $n - 1$ *y obtenemos que*

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}.$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1},$$

de aquí obtenemos

$$(n-1)^2 a_{n-1} = (n^2 - 1) a_n$$

de donde

$$(\frac{n-1}{n+1}) a_{n-1} = a_n.$$

Haciendo lo mismo para a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., *vemos que:*

$$(\frac{n-1}{n+1}) a_{n-1} = (\frac{n-1}{n+1})(\frac{n-2}{n}) a_{n-2} = ...$$

hasta obtener

$$(\frac{n-1}{n+1})(\frac{n-2}{n})(\frac{n-3}{n-1})...(\frac{3}{5})(\frac{2}{4})(\frac{1}{3}) a_1 = a_n.$$

Como $a_1 = 1$ *tenemos que*

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)},$$

por lo tanto,

$$a_{2005} = \frac{2}{(2005)(2006)}.$$