

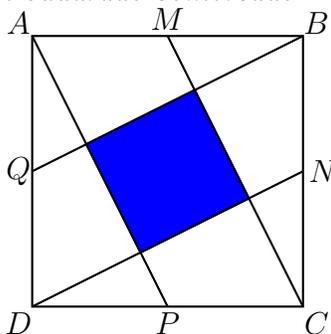
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Examen estatal de Baja California

Tercera etapa

Buena Suerte!!!

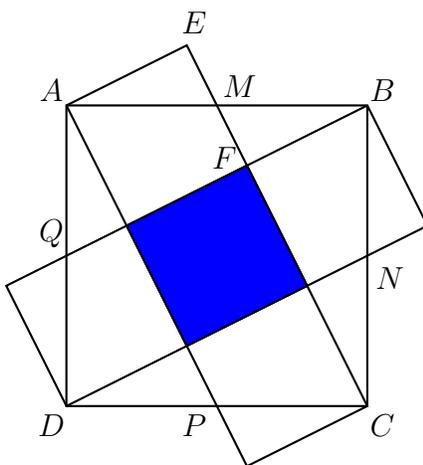
Problema 1 *En la siguiente figura, el cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud 1. Los puntos M , N , P , Q , son los puntos medios de los respectivos lados. Encuentra el área del cuadrado sombreado.*



Problema 2 *Se tiene una balanza de dos platos con la cual queremos pesar objetos desde 1 Kg hasta 100 Kg (solamente queremos pesar objetos con una cantidad entera de kilogramos). Los objetos se colocan en uno de los platos y las pesas en el otro. Demuestra que bastan 7 pesas distintas y encuentra cuáles son sus valores. Explica tu respuesta.*

Problema 3 *Un grupo de 7 científicos trabajan en un proyecto secreto. Los materiales que ellos utilizan se mantienen en una bóveda. Ellos quieren que la bóveda sólo pueda abrirse cuando estén presentes la mayoría del grupo. Entonces, la seguridad se logra poniendo una cierta cantidad de candados y dándole a cada científico la llave de algunos de los candados (la misma cantidad de llaves a cada científico). ¿Cuántos candados se necesitan y cuántas llaves se le debe dar a cada científico?*

Solución 1 Observemos la siguiente figura:



Dado que AE y BF son paralelas y M es el punto medio del lado AB , tenemos que el triángulo $\triangle AEM$ es congruente al triángulo $\triangle BFM$. De manera análoga tenemos que todos los triángulos exteriores son congruentes al triángulo AEM , entonces, tenemos que la cruz de la figura tiene la misma área que el cuadrado $ABCD$. Dado que la cruz está formada por 5 cuadrados iguales, tenemos que el área del cuadrado sombreado es la quinta parte del área del cuadrado $ABCD$, esto es,

$$\frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

Solución 2 Consideremos las pesas con valores 1, 2, 4, 8, 16, 32, y 64 kilogramos. El peso más grande que podemos medir es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

Además, es fácil ver que podemos medir todas las cantidades enteras entre 1 y 127 (incluyendo 1 y 127) escogiendo subconjuntos de pesas de entre estas 7.

Solución 3 Dados tres miembros del grupo debe existir un candado para el cual ninguno de ellos tenga la llave. Entonces, cada uno de los otros 4 miembros debe tener esta llave. Obtenemos que el número de candados debe

ser al menos igual al número de formas en que podemos escoger 3 personas de entre los 7 científicos, esto es,

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Ahora, sea A uno de los científicos. Tenemos que dado cualquier conjunto de 3 científicos, seleccionados de entre los 6 restantes, debe haber un candado el cual ellos no pueden abrir, entonces A debe tener llave para este candado. Por lo tanto, A tiene al menos

$$\binom{6}{3} = 20$$

llaves.